On accidental compound parabolic transformation (Analysis and Topology of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces)

AUTHOR(S):

佐久川, 恵太

数理解析研究所講究録
第 1660 巻 2009 年 15-29

On accidental compound parabolic transformation

明治大学 大学院理工学部 基礎理工学専攻 数学系 M2
佐久川　恵太

1 はじめに

$PSL_2\mathbb{C}$ の二つの放物型変換 a,b が ab も放物型であるという条件を満たすとき，$PSL_2\mathbb{C}$ の 2 元生成部分群 $G=\langle a,b\rangle$ は共役を除いて一意的に

$$a=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

とあらわされることが知られている (直接の計算でわかる).

3 次元のメビウス変換群では回転と平行移動の合成からなる放物型変換があるため，同様の条件で定まる群の族を考えると上記のモジュラー群を含む，低次元ではあらわれないような群の族が存在することがわかった.

コンピュータを使った実験により，この群の極限集合および群の変形空間について調べた．この群は $PSL_2\mathbb{C}$ の二元生成部分群で観察される位数 2 の対称性を持つ．しかし，この群の性質に関して数学的にはほとんどわかっていない．この例が扱い易いものなのかもわからない.

極限集合を可視化できるのはある意味で 3 次元メビウス変換 (4 次元クライン群) が限界である．4 次元クライン群の変形や極限集合の研究は阿原 [1], 阿原-荒木 [12], 荒木-糸-小森 [2] や [4] などがある.

2 準備

2.1 メビウス変換と 2 次行列

同様に $\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の 2 次行列による表現を考える．$\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbb{R}}^2)$ と $PSL_2\mathbb{C}$ の対応は $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ とみなすことにより得られていた．$\mathbb{C}$ を部分空間に持つ代数構造として四元数を定義する.

Definition 1. $\boldsymbol{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ で生成される $M_2\mathbb{C}$ 上の実ベクトル空間を四元数とよび，$\mathbb{H}$ であらわす．$\mathbb{H}$ の積は行列の積とする．$x=x_0+x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}\in\mathbb{H}$ に対し，$\mathrm{Re}(x)=x_0$ を x の実部，$\mathrm{Im}(x)=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$ を x の虚部，$\overline{x}=x_0-x_1\boldsymbol{i}-x_2\boldsymbol{j}-x_3\boldsymbol{k}$ を x の共役とよぶ．$|x|=\sqrt{x\overline{x}}$ を x の絶対値とよぶ.

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=\boldsymbol{ijk}=-1$ を満たす．$\boldsymbol{ij}=-\boldsymbol{ji}$ であるから $\mathbb{H}$ は可換ではないが，任意の $x\in\mathbb{H}-\{0\}$ に対し逆元 $x^{-1}=\overline{x}/|x|^2$ が存在するので，$\mathbb{H}$ は体となる.

$\mathbb{H}$ の部分空間 $\mathbb{E}^3:=\{x_0+x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}\mid x_0,x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}^3$ と，$\{x_0+x_1\boldsymbol{i}\mid x_0,x_1\in\mathbb{R}\}$ を $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ とそれぞれ同一視する.

Definition 2. 四元数 $x = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} \in \mathbf{H}$ に対し，x の $\boldsymbol{k}$ 成分の符号を反転させる操作 $x^* = -\boldsymbol{k}\overline{x}\boldsymbol{k} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} - x_3\boldsymbol{k}$ を x のクリフォード転置 (Clifford transpose) と呼ぶ.

定義から $\mathbf{E}^3 = \{x \in \mathbf{H} \mid x^* = x\}$ である．複素数の場合と同様に，

$$\mathbf{H}P^1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbf{H} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^2 - \{0\} \right\}$$

を四元数(右)射影直線とよぶ．$\mathbf{H}P^1 \ni \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\mathbf{H} \leftrightarrow x \in \mathbf{H}$, および $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathbf{H} \leftrightarrow \infty$ という対応で $\mathbf{H}P^1 \simeq \mathbf{H}\cup\{\infty\}$ とする．この対応の下で $\hat{\mathbf{E}}^3 := \mathbf{E}^3 \cup \{\infty\}$ は次のようにエルミート形式であらわすことができる.

Lemma 1.

$$\hat{\mathbf{E}}^3 = \left\{ v \in \mathbf{H}P^1 \;\middle|\; {}^t\overline{v} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix} v = 0 \right\}.$$

Proof. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathbf{H} \simeq \infty$ の場合，計算により ${}^t\overline{v}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix} v = 0$.

$v \in \mathbf{E}^3$ の場合，$x \in \mathbf{E}^3 \Longleftrightarrow x = x^*$ なので

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{k}\overline{x}\boldsymbol{k} - x &= 0 \\ \overline{x}\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}x &= 0 \\ {}^t\overline{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

∎

上述の補題 1 より ${}^t\overline{A}\begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix}$ を満たす $A \in \mathrm{M}_2\mathbf{H}$ の $\mathbf{H}P^1$ への一次分数作用

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v := \begin{cases} (av+b)(cv+d)^{-1} & \text{for } v \in \mathbf{H}, \\ ac^{-1} & \text{for } v = \infty. \end{cases}$$

は $\mathbf{E}^3$ を保つ.

Definition 3. $\mathrm{GL}_2\mathbf{H} = \{M \in \mathrm{M}_2\mathbf{H} | \det_s M \neq 0\}$,
$\mathrm{Sp}^K(1,1) := \left\{ A \in \mathrm{GL}_2\mathbf{H} \;\middle|\; {}^t\overline{A}KA = K,\ K = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k} & 0 \end{pmatrix} \right\}$ と定義する.

Lemma 2. $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対し，

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} w^* & -y^* \\ -z^* & x^* \end{pmatrix}$.
2. $xw^* - yz^* = w^*x - y^*z = 1$.
3. $xy^* = yx^*, zw^* = wz^*, z^*x = x^*z, w^*y = y^*w$.

が成り立つ.

Proof. $\mathrm{Sp}^K(1,1)$ の定義から $A^{-1} = K^{-1}({}^t\overline{A})K$. $K^2 = I$ から $K^{-1} = K$ なので

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{z} \\ \overline{y} & \overline{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w^* & -y^* \\ -z^* & x^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

残りの主張は

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^* & -y^* \\ -z^* & x^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xw^* - yz^* & -xy^* + yx^* \\ zw^* - wz^* & -zy^* + wx^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} w^* & -y^* \\ -z^* & x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w^*x - y^*z & w^*y - y^*w \\ -z^*x + x^*z & -z^*y + x^*w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より得られる. ∎

一般に, $\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbb{R}}^n)$ はクリフォード代数を要素とする 2×2 行列によって表せることが知られている [Vahlen 1902],[20].

蛇足: $\mathrm{GL}_2\mathbb{H}$

$\mathrm{GL}_2\mathbb{H}$ を「$\mathrm{M}_2\mathbb{H}$ の可逆な行列の集合」と定義したいが, $\mathbb{H}$ は可換ではないので, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2\mathbb{H}$ に対し行列式を $ad - bc$ と安直に定義しても逆元が存在するかどうかを判定することはできない. 例えば $\begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$ は $1k - ij = 0$ となるが, 逆元 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -j \\ -i & -k \end{pmatrix}$ を持つ.

正則性の判定の一つの方法として, 四元数を $\mathbb{C}$ 係数の 2 次行列とみなし, $\mathrm{M}_n\mathbb{H}$ の行列式 $\det_s$ を $\mathrm{M}_{2n}\mathbb{C}$ の行列式と定義する方法がある. このような行列式は *Study* **行列式**と呼ばれる [20, Section 6]. $\mathrm{M}_2\mathbb{H}$ の場合には,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2\mathbb{H} \text{ に対し}, \det{}_s A = |a|^2\,|d|^2 + |b|^2\,|c|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}b\overline{d}c)$$

となる.

3 三次元メビウス変換群の固定点集合の分類

三次元メビウス変換を共役不変量によって分類する.

四元数に関する次の性質は計算のなかでしばしば用いられるので示しておく.

Lemma 3. *1.* $x \in \mathbb{H}$ に対し, $x^2 - 2\mathrm{Re}(x)x + |x|^2 = 0$.

2. $x, y \in \mathbf{H}$ に対し，$\mathrm{Re}(xy) = \mathrm{Re}(yx)$.

Proof. 1. $2\mathrm{Re}(x) = \mathrm{tr}(x), |x|^2 = \det x$ であるから二次行列に対するハミルトンケーリーの定理

$$x^2 - \mathrm{tr}(x)x + \det(x) = O \tag{1}$$

より従う．

2. 行列のトレースの性質 $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$ から従う．

∎

3.1 $\mathrm{Sp}^K(1,1)$ の共役不変量

Definition 4. 恒等変換でない $g \in M\ddot{o}b^+(\hat{\mathbf{R}}^3)$ の型を $\hat{\mathbf{H}}$ への作用により，次のように定義する．

1. g の固定点が $\mathbf{H}^+$ に存在するとき楕円型，

2. g の固定点が $\hat{\mathbf{R}}^3$ に *1* つだけ存在するとき放物型，

3. g の固定点が $\hat{\mathbf{R}}^3$ に *2* つだけ存在するとき斜航型，

とよぶ．

2 次元メビウス変換 $\mathrm{PSL}_2\mathbf{C} \simeq \mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbf{R}}^2)$ の型は行列のトレースによって分類される．$\mathrm{SL}_2\mathbf{C} \subset \mathrm{Sp}^K(1,1)$ なので，三次元メビウス変換に対しても行列のトレースが分類に役立つと考えられる．しかし $\mathbf{H}$ は非可換であるから一般に（対角成分の和としての）トレースは共役不変ではない．しかし，トレースの実部は共役不変である．

Lemma 4. $A \in \mathrm{M}_2\mathbf{H}, B \in \mathrm{GL}_2\mathbf{H}$ に対し，$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(BA)$.

Proof. 任意の $x, y \in \mathbf{H}$ に対し $\mathrm{Re}(xy) = \mathrm{Re}(yx)$ が成り立つことより． ∎

トレースの「虚部」（の絶対値の二乗）に対応する共役不変量がある．

Lemma 5. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対し，$|\mathrm{Im}(a + d^*)|^2 + 4b_3c_3$ は共役不変．ただし，b_3, c_3 はそれぞれ b, c の $\boldsymbol{k}$ 成分とする．

Proof. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対し，$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} a + d^* & b - b^* \\ c - c^* & a^* + d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2\mathbf{H}$ なので，補題 4 により $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(A + A^{-1})^2$ は A の共役不変量．実際にこの値を計算すると，

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(A + A^{-1})^2 = 4((\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A)^2 - (|\mathrm{Im}(a + d^*)|^2 + 4b_3c_3))$$

$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,A$ は A の共役不変量なので $|\mathrm{Im}(a + d^*)|^2 + 4b_3c_3$ も A の共役不変量となる． ∎

木戸 [3] はメビウス変換の固定点に関するヤコビアンの計算からこの $|\mathrm{Im}(a + d^*)|^2 + 4b_3c_3$ という量を導いている．また，Cao-Parker-Wang [18] の論文では（単位球モデルでの）三次元メビウス変換の固定点の方程式を直接解く過程で，この量があらわれている．ちなみに，$A + A^{-1}$ の Study 行列式を計算すると，

$$\det{}_s(A + A^{-1}) = \left| |a + d^*|^2 + 4b_3c_3 \right|^2$$

となる．$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(a+d)(=\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(a+d^*))$ と $|a+d^*|^2+4b_3c_3$ という量は $\mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対する Cayley-Hamilton の定理としてまとめられる．

Proposition 1 ($\mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対する Cayley-Hamilton の定理)．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対し，$\tau_A := A+A^{-1}=\begin{pmatrix} a+d^* & b-b^* \\ c-c^* & d+a^* \end{pmatrix}$ とおく．このとき

$$\tau_A^2-2\mathrm{Re}(a+d^*)\tau_A+(|a+d^*|^2+4b_3c_3)I=O.$$

Proof. 任意の四元数 x に対して $x^2-2\mathrm{Re}(x)x+|x|^2=0$ であることを用いて，$t=a+d^*$ とおいて τ_A^2 を計算する．

$$\tau_A^2=\begin{pmatrix} 2\mathrm{Re}(t)t-|t|^2-4b_3c_3 & 4\mathrm{Re}(t)b_3k \\ 4\mathrm{Re}(t)c_3k & 2\mathrm{Re}(t)(t^*)-|t^*|^2-4b_3c_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$=2\mathrm{Re}(t)\tau_A-(|t|^2+4b_3c_3)I. \tag{3}$$

∎

$\mathrm{Re}(a+d), |\mathrm{Im}(a+d^*)|^2+4b_3c_3, b_3, c_3$ を使って $\mathrm{Sp}^K(1,1)$ の元を分類することができる．これは本質的には Cao-Parker-Wang [18] の元の分類と同じものである．具体的な読み換えは木戸 [3] を参考に [4] で行なわれている．

Theorem 1. $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{Sp}^K(1,1)$ に対し，$\mathrm{tr}^*(g)=a+d^*, \Delta(g)=|\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}^*(g)|^2+4b_3c_3$ とする．ただし，b_3,c_3 は b,c の k 成分とする．このとき，g が単位行列でないならば

1. $\Delta=b_3=c_3=0$ かつ $|\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,g|<2$ ならば g は楕円型（この場合を単純楕円型と呼ぶ）．
2. $\Delta=b_3=c_3=0$ かつ $|\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,g|=2$ ならば g は放物型（この場合を単純放物型と呼ぶ）．
3. $\Delta=b_3=c_3=0$ かつ $|\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,g|>2$ ならば g は斜航型（この場合を双曲型と呼ぶ）．
4. $\Delta<0$ ならば g は楕円型（この場合を混合楕円型と呼ぶ）．
5. $\Delta=0$ かつ $b_3\neq c_3$ ならば g は放物型 (この場合を混合放物型と呼ぶ).
6. $\Delta>0$ ならば g は斜航型 (この場合を混合斜航型とよぶ).

4 2つの放物型変換で生成される四次元クライン群

Definition 5. $M\ddot{o}b^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の部分群 Γ が離散群であるとは Γ が $M\ddot{o}b^+(\hat{\mathbb{R}}^3)\simeq \mathrm{Sp}^K(1,1)$ の位相で離散なときをいう．

$\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の離散部分群 Γ を 4 次元**クライン群**とよぶ．2 次元クライン群は**フックス群**とも呼ばれる．クライン群 Γ に対し，$\mathbb{R}^3$ での固定点集合の閉包を Γ の**極限集合**といい，$\Lambda(\Gamma)$ であらわす．

次の命題はモジュラー群の一意性として知られている．

Proposition 2 (モジュラー群の一意性)．$M\ddot{o}b^+(\hat{\mathbb{R}}^2)\ni a,b$ を $fix(a)\neq fix(b)$ となる放物型の元で，ab も放

物型であるとし，$G=\langle a,b\rangle$ とする．このとき $G=\langle a,b\rangle$ は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ による共役で

$$a=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

とできる．このとき G はフックス群である．G はモジュラー群とよばれる．

Proof. $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ による共役で b の固定点を ∞ とし，相似変換による共役を考えれば $b=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とかける．$\mathbb{C}$ の平行移動による共役で b は変わらないから a の固定点を 0 とできる．つまりある $z\in\mathbb{C}$ により $a=\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}$ とかける．ab が放物型という条件から z の条件を求める．

$$ab=\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\z&z+1\end{pmatrix}.$$

ab が放物型変換であるためには $\mathrm{tr}\,ab=z+2=\pm2$ を満たす必要がある．$z=0$ のときは $a=I$ となってしまうので $z=-4$ でなければならない．このとき G は $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}$ の部分群であるから離散的，すなわちフックス群である． ∎

この命題は $\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbf{R}}^2)$ で a,b,ab が放物型という条件を満たす二元生成群は共役を除いて一意的に決まってしまうこと，さらにそれは $\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbf{R}}^1)$ の離散部分群であることを言っている．この条件を次元を上げて考えるとどうなるか，ということを考えてみた．

問題

$\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbf{R}}^3)\ni a,b$ を $\mathrm{fix}(a)\neq\mathrm{fix}(b)$ となる（混合）放物型の元で，ab も放物型であるとし，$G=\langle a,b\rangle$ とする．

1. 共役を除いて G はどのくらいあるか?
2. G が離散的である範囲は? 自由群である範囲は?
3. $\Lambda(G)$ はどんな形になるか?

空間の次元が上がることで問題は簡単ではなくなるので，限定された条件の下で前述の問題を考えてみる．

$\mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbf{R}}^3)$ の混合放物型の元 f は $\mathbf{R}^3$ の回転と平行移動の合成からなる変換に共役なメビウス変換である．つまり f は単純楕円型変換と単純放物型変換の積に分解できる．このときの単純楕円型変換の $\hat{\mathbf{R}}^3$ での固定点を f の回転軸とよぶ．

Lemma 6. a,b は放物型で異なる固定点を持ち，回転軸を共有するとする．このとき $\mathrm{Sp}^K(1,1)$ の共役を除いて a,b は

$$a=\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}e^{k\theta_a},\quad b=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}e^{k\theta_b}$$

と表せる．ただし，$z\in\mathbf{R}^3, e^{k\theta}=\cos\theta+k\sin\theta$ とする（$e^{j+k}\neq e^{k+j}$ なので記法としてはよくないが，簡単のためこのように書くことにする）．

Proof. まず b の固定点を ∞ としてよい．b は $\mathbf{R}^3$ の回転と平行移動との合成であらわせる．とくに $\mathbf{R}^3$ の回転による共役で b の回転軸を実軸，平行移動を実軸に沿った移動とすれば，$b=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}e^{k\theta_b}$ とおける．a,b

は回転軸を共有するという条件から a の固定点は実軸上になければならない．実軸方向の平行移動による共役で b は変わらないから，a の固定点を 0 としてよい．0 を固定する単純放物型変換は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$, $z = z^*$ とかけるから望む主張を得る． ∎

Lemma 7. $a, b \in \mathrm{Sp}^K(1,1)$ は異なる固定点を持つ放物型変換で，回転軸を共有するとする．このとき，以下は同値．

1. ab が放物型．
2. ある $\phi \in [0, 2\pi]$ があって，$z = z_0 + R\cos(\phi)\boldsymbol{i} + R\sin(\phi)\boldsymbol{j}$ とあらわせる．ただし $R = \sqrt{-z_0(z_0+4)\{\sin^2(\theta_a+\theta_b)\}}$, $z_0 \in [-4, 0)$ で $R = 0$ のときは $z = -4$ とする．

Proof. a, b は補題 6 の形で与えられているとする．直接計算により，

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} e^{\boldsymbol{k}\theta_a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\boldsymbol{k}\theta_b} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z & z+1 \end{pmatrix} e^{\boldsymbol{k}(\theta_a+\theta_b)}. \tag{5}$$

ab が放物型であるための条件を求める．$\theta = \theta_a + \theta_b$ とおいて，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}^*\, ab &= e^{\boldsymbol{k}\theta} + ((z+1)e^{\boldsymbol{k}\theta})^* \\
&= 2\cos\theta + e^{-\boldsymbol{k}\theta} z \\
&= (2+z_0)\cos\theta + \boldsymbol{i}(z_1\cos\theta + z_2\sin\theta) + \boldsymbol{j}(z_2\cos\theta - z_1\sin\theta) - \boldsymbol{k}z_0\sin\theta.
\end{aligned}$$

非対角成分の $\boldsymbol{k}$ 成分は $\sin\theta, z_0\sin\theta$ であるから，ab が放物型ならば

$$\Delta(ab) = |\mathrm{Im}(\mathrm{tr}^*\, ab)|^2 + 4z_0\sin^2\theta \tag{6}$$

$$= (z_1\cos\theta + z_2\sin\theta)^2 + (z_2\cos\theta - z_1\sin\theta)^2 + (z_0\sin\theta)^2 + 4z_0\sin^2\theta \tag{7}$$

$$= z_1^2 + z_2^2 + (z_0^2 + 4z_0)\sin^2\theta \tag{8}$$

$$= 0 \tag{9}$$

を満たす．$z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ なので，

$$z_1^2 + z_2^2 = -(z_0^2 + 4z_0)\sin^2\theta \geq 0. \tag{10}$$

1. $\sin\theta = 0$ のとき．
   式 (10) より $z_1 = z_2 = 0$．また，ab の非対角成分の $\boldsymbol{k}$ 成分は 0 になるので ab は単純であり，放物型であるためには
   $$|\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(ab)| = |(2+z_0)\cos\theta| = |2+z_0| = 2 \tag{11}$$
   を満たす必要がある．したがって，$z_0 = 0$ または $z_0 = -4$．しかし $z_0 = 0$ のとき $z = 0$ で $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\boldsymbol{k}\theta_a}$ となり，a が放物型ではなくなるので $z_0 = -4$ でなければならない．
2. $\sin\theta \neq 0$ のとき．
   式 10 より $-4 \leq z_0 \leq 0$．ただし，$z_0 = 0$ のときは上と同様の理由で a が放物型でなくなるので $z_0 < 0$ としてよい．このとき $R = |\sin\theta|\sqrt{-z_0(4+z_0)}$ とおけば，ある $\phi \in [0, 2\pi]$ により $z_1 = R\cos\phi, z_2 = R\sin\phi$ とあらわせる．

以上より，望む主張を得る． ∎

Lemma 8. $\mathrm{Sp}^K(1,1)$ による共役により補題 7 の ϕ は 一定 にできる．

Proof. ある実軸周りの回転 $p=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}e^{k\lambda/2}$ による共役により b は変わらない．このとき pap^{-1} を計算すれば，

$$pap^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ e^{-k\lambda/2}ze^{k\lambda/2} & 1\end{pmatrix}e^{k\theta_a}. \tag{12}$$

$z\mapsto e^{k\lambda/2}ze^{-k\lambda/2}$ は実軸周りの角 λ の回転をあらわすので，適当な λ をとることにより $z\in\mathbb{C}$ とできる． ∎

$G=\langle a,b\rangle$ は z_0,θ_a,θ_b により定まるのでこれを $=G(z_0,\theta_a,\theta_b)$ と記すことにする．

$\mathbf{F}_2=\langle\alpha,\beta\rangle$ をランク 2 の自由群とし，$\rho:\mathbf{F}_2\to \mathrm{M\ddot{o}b}^+(\hat{\mathbf{R}}^3)$ を $\rho(\alpha)=a$ かつ $\rho(\beta)=b$ を満たす表現とする．ρ の定め方から $\rho(\mathbf{F}_2)=G(z_0,\theta_a,\theta_b)$. つまり ρ は z_0,θ_a,θ_b により決まる．

Definition 6. $\rho(\mathbf{F}_2)$ が離散群になるとき ρ は離散（表現）という．ρ が同型のとき ρ は忠実な表現という．$\mathcal{F}$ を離散かつ忠実な表現の集合とする．

ρ_0 を $\rho_0=\rho(-4,0,0)$，すなわち $\rho_0(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$, $\rho_0(\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ としよう．

Definition 7. $w\in\mathbf{F}_2$ と ρ に対し，$\rho_0(w)$ は斜航型だが，$\rho(w)$ が放物型となる $\rho\in\mathcal{F}$ が存在するとき，$\rho(w)$ を潜伏的放物型変換 (accidental parabolic transformation) と呼ぶ．

放物型変換は楕円型変換と斜航型変換の境界にあると考えられるので，潜伏的放物型変換を調べることで $\mathcal{F}$ の概形をつかめるのではないかと考えられる．

5 コンピュータによる実験と極限集合の描画

$\rho(w)$ が楕円型となるような $w\in\mathbf{F}_2$ が存在したとしよう．このとき

1. $\rho(w)$ が有限位数の元ならば ρ は忠実ではない．
2. $\rho(w)$ が有限位数の元でないならば ρ は離散ではない（なぜなら $\rho(w)^n$ の固定点の集合は上半空間内に集積点を持つことになり，離散群ではあり得ないため）．

したがって，もし $\rho(\mathbf{F}_2)$ が楕円型の元を含むのならば ρ は忠実でない，あるいは離散的ではないことになる．

コンピュータによる実験により長さが 30 までの $\mathbf{F}_2$ の元に対し，$\theta_b=0,\theta_a=\pi/2,\theta_a=0,\theta_a=\pi/2$ と固定した場合に楕円型変換を含むかどうかについて調べてみた (図 1 から 4). 長さが 30 までの word について，等長球の半径が十分小さいならそこから先の枝は打ち切り，楕円型変換が見つからなかったときは黒く塗りつぶしている．これらの図からわかるのはあくまで忠実ではないか離散的ではない ρ であって，黒く塗りつぶされた場所に対応する ρ が離散的であるとは限らない．いくつかのパラメータに対して G の極限集合を描いたものが図 5 から 8 である．

5.1 位数2の対称性

極限集合を描いて眺めていると，π 回転による対称性がありそうなことに気付いた．実際，$G(z_0, \theta_a, \theta_b)$ について次の性質が成り立つ．

Proposition 3. $G(z_0, \theta_a, \theta_b) = \langle a, b \rangle$ に対し，$a = PQ, b = PR$ を満たす位数 2 の単純楕円型変換 $P, Q, R \in M\ddot{o}b^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ が存在する．

Proof. $P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} e^{k\theta_a}$ とおく．

$$\mathrm{tr}^* P = ie^{k\theta_a} - e^{-k\theta_a} i = ie^{kth} - ie^{k\theta_a} = 0. \tag{13}$$

したがって，$P + P^{-1} = O$ なので $P^2 + I = O$ を満たす．よってメビウス変換として P は位数 2 の単純楕円型である．$Q = P^{-1}a, R = P^{-1}b$ が共に位数 2 の単純楕円型であることを示せばよい．

$$\begin{aligned} Q &= e^{-k\theta_a} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} e^{k\theta_a} \\ &= e^{-k\theta_a} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ iz & i \end{pmatrix} e^{k\theta_a}. \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$ であるから，P と同じ理由で Q は位数 2 の単純楕円型．

$$\begin{aligned} R &= e^{-k\theta_a} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{k\theta_b} \\ &= e^{-k\theta_a} \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix} e^{k\theta_b} \\ &= \begin{pmatrix} -i & -i \\ 0 & i \end{pmatrix} e^{k(\theta_a + \theta_b)}. \end{aligned}$$

$-ie^{k(\theta_a+\theta_b)}$ の k 成分は 0 で，$\mathrm{tr}^* R = 0$ なので，R も位数 2 の単純楕円型． ∎

Proposition 4. $\Lambda(G)$ は π 回転による対称性を持つ．

Proof. 命題 3 から $Pa = a^{-1}P, Pa^{-1} = aP, Pb = Pb^{-1}, Pb^{-1} = bP$ が成り立つ．このことから任意の $g \in G$ に対し，$g' \in G$ が存在して，$PgP = g'$ とあらわせる．このとき $\mathrm{fix}(g')$ は $P(\mathrm{fix}(g))$ なので $\Lambda(G)$ は P による回転で対称． ∎

この性質は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の二元生成部分群が持つ（離散性とは関係のない）性質である．

Proposition 5. $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ の二元生成部分群 $\langle a, b \rangle$ に対し，$\mathrm{tr}(aba^{-1}b^{-1}) \neq 2$ であれば $PaP = a^{-1}, PbP = b^{-1}$ となる位数 2 の楕円型変換 $P \in \mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ が存在する．

Proof. $\mathrm{SL}_2\mathbb{C} \ni A$ に対し，$\det(A - I) = 2 - \mathrm{tr}\, A$ より，

$$\det(ab - ba) = \det(aba^{-1}b^{-1} - I) \det(ba) = 2 - \mathrm{tr}(aba^{-1}b^{-1})$$

よって $\mathrm{tr}(aba^{-1}b^{-1}) \neq 2$ のとき $ab - ba$ は正則．$\tilde{P} = ab - ba$ とおくと $\mathrm{tr}(\tilde{P}) = 0, \mathrm{tr}(\tilde{P}a) = 0, \mathrm{tr}(\tilde{P}b) = 0$ である．$\tilde{P}$ を行列式が 1 となるように正規化したものを P とすれば，この P が望むものである． ∎

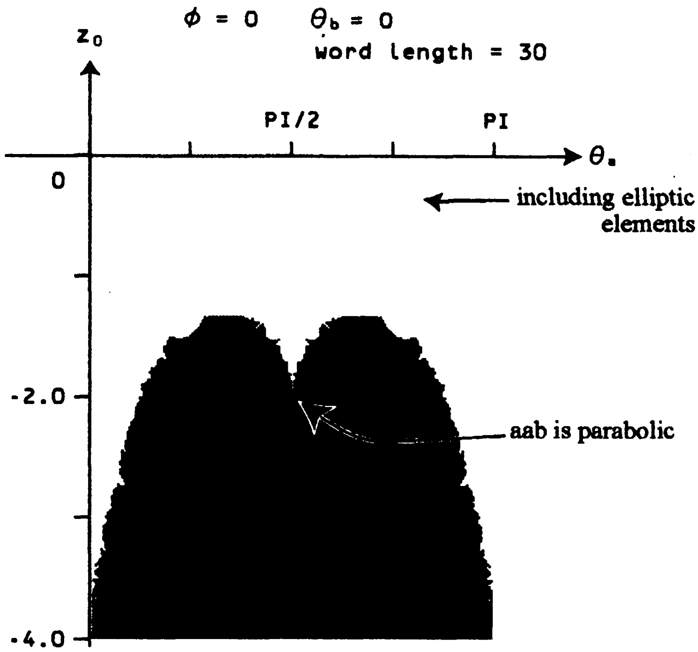

図1 $\theta_b = 0$のとき

一点穴あきトーラス群とよばれる$PSL_2\mathbb{C}$の二元生成部分群に対する，位数2の楕円型変換の三つ組みによる解析があり（これはもともとはJørgensenによるものだが，秋吉-作間-和田-山下[13]が詳しい)，これと類似した方法で$G(z_0, \theta_a, \theta_b)$を詳しく解析できるのではないかと期待しているが，$Sp^K(1,1)$の行列の要素が四元数だったりするので，それは楽観的すぎるのかもしれない．

謝辞

遅筆な筆者を辛抱強く見守りながら指導してくださった阿原一志准教授，2007年9月に行われた秋田大学での研究集会「トポロジーとコンピュータ」世話人の鈴木正明さん（秋田大学)，2007年12月に行われた京都大学数理研究所での研究集会「離散群と双曲空間の解析学とトポロジー」の世話人である藤井道彦さん（京都大学）にこの場を借りて感謝いたします．糸健太郎さん（名古屋大学）には筆者の作成したプログラムを非常に喜んでいただいて励みになりました．山下靖さん（奈良女子大）にもいろいろな助言をいただきました．重ねて感謝いたします．

参考文献

[1] 阿原 一志「球面体と3次元擬フックス群」数理解析研究所講究録 1329 (2003), 109-114.

[2] 荒木 義明, 糸 健太郎, 小森 洋平, *A note on a 3-dimensional extension of the Maskit slice*, 数理解析研究所講究録 1571(2007),172-192.

[3] 木戸 哲也『メビウス変換について』プレプリント (2003).

[4] 佐久川 恵太, *On limit set of 4-dimensional Kleinian group with 3-generators*, 数理解析研究所講究録

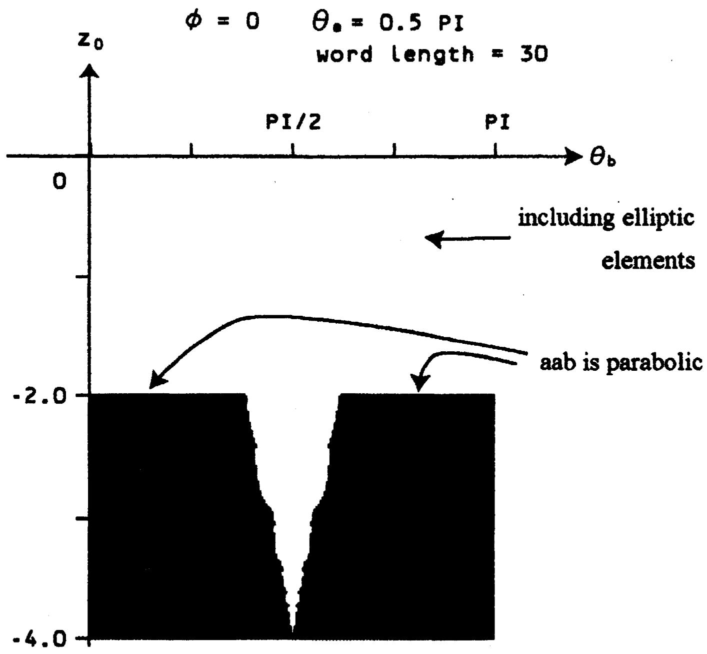

図 2 $\theta_a = 0.5\pi$ のとき

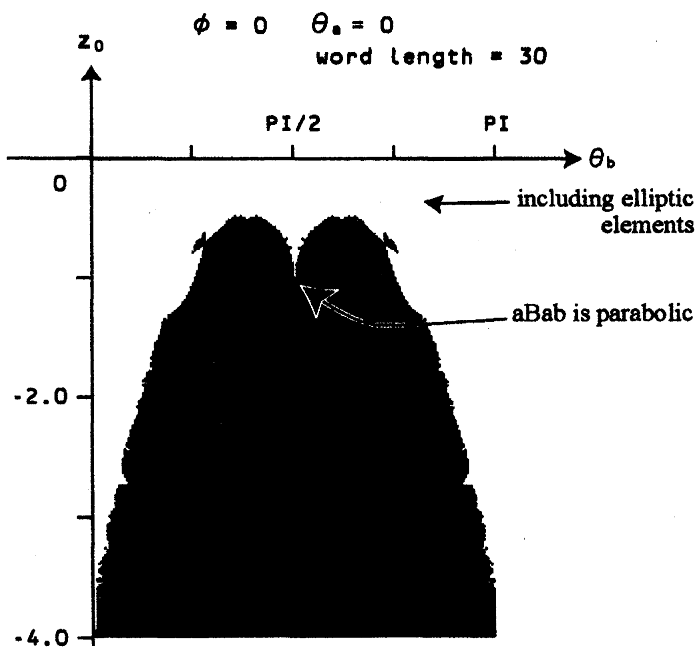

図 3 $\theta_a = 0$ のとき

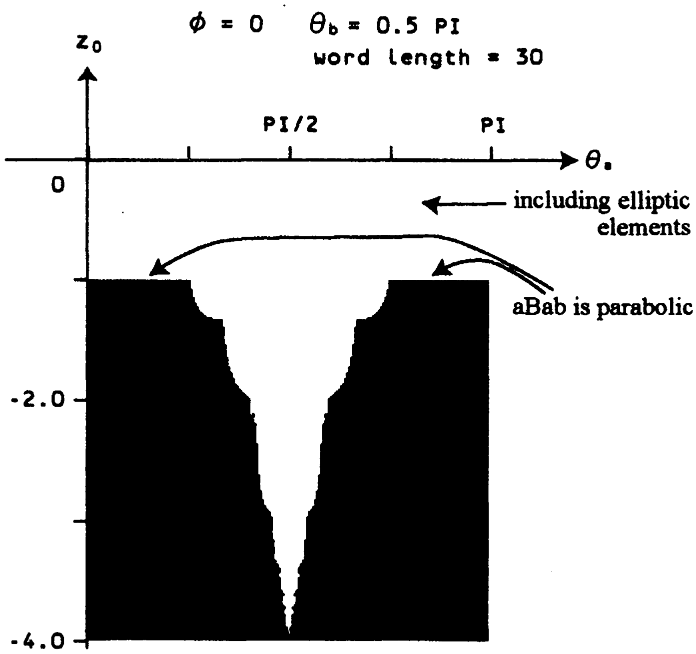

図 4 $\theta_b = 0.5\pi$ のとき

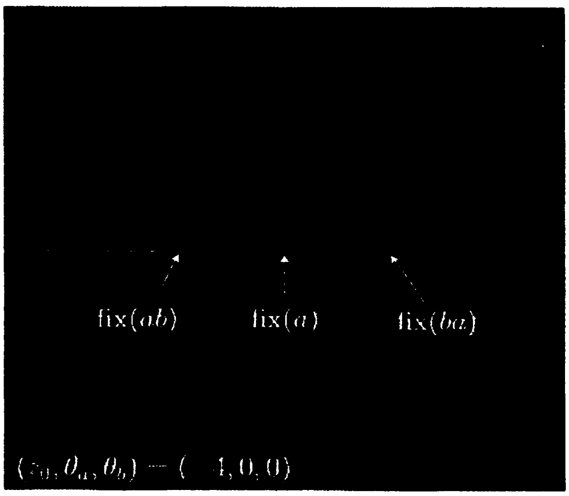

図 5 $(z_0, \theta_a, \theta_b) = (-4, 0, 0)$ のときの $\Lambda(G)$.

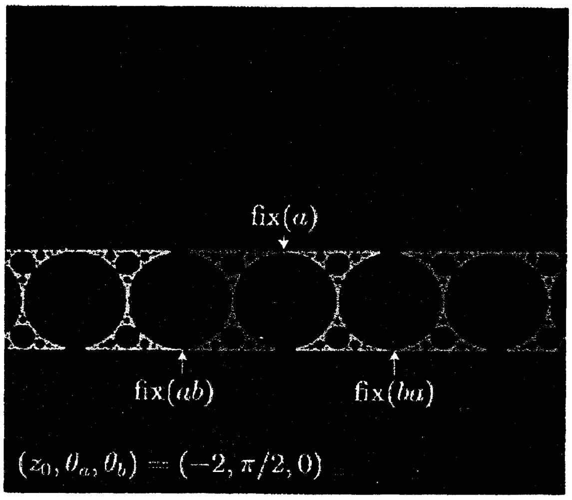

図 6 $(z_0, \theta_a, \theta_b) = (-2, \pi/2, 0)$ のときの $\Lambda(G)$.

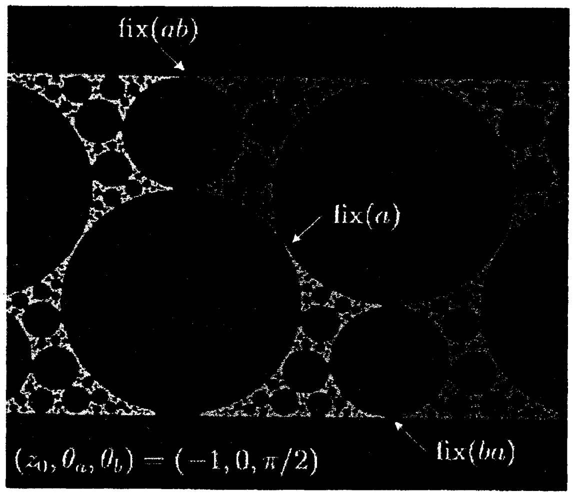

図 7 $(z_0, \theta_a, \theta_b) = (-1, 0, \pi/2)$ のときの $\Lambda(G)$.

1571(2007),123-138. .

[5] 佐久川 恵太, コンピュータソフトウェア, “Norio” .

[6] 谷口 雅彦, 奥村 善英『双曲幾何学への招待』培風館 (1996).

[7] 谷口 雅彦, 松崎 克彦『双曲的多様体とクライン群』日本評論社 (1993) .

[8] 宮地 秀樹『私的 3 次元双曲幾何入門』プレプリント.

[9] 和田 昌昭, *OPTi*, http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/wada/OPTi/index.html.

[10] 和田 昌昭『OPTi における極限集合描画アルゴリズム』プレプリント (2002) .

[11] 和田 昌昭『OPTi における離散性判定アルゴリズム』プレプリント (2002) .

[12] Ahara K., and Araki Y., *Spheirahedral approach to parameterize visible three dimensional quasi-*

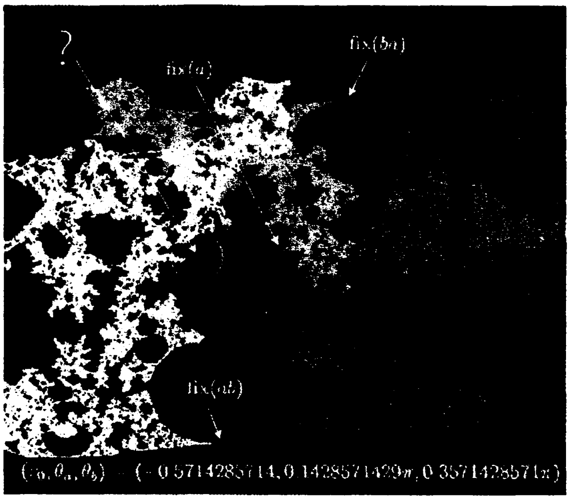

図 8 $(z_0, \theta_a, \theta_b) = (-0.5714285714, 0.1428571429\pi, 0.3571428571\pi)$ のときの $\Lambda(G)$.

Fuchsian fractals, Proc. of the CGI (2003), 226-229.

[13] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Mathematics, 1909, Springer-Verlag, 2007.

[14] Akiyoshi H., Sakuma M., Wada M., and Yamashita Y., *Jorgensen's picture of quasifuchsian punctured torus groups*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds, London Math. Soc., Lecture Note Series. 299 (2003), 247-273.

[15] Akiyoshi H., and Sakuma M., *Comparing two convex hull constructions of cusped hyperbolic manifolds*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds, London Math. Soc., Lecture Note Series. 299 (2003), 209-246.

[16] Akiyoshi H., Miyachi H., and Sakuma M., *A refinement of McShane's identity for quasifuchsian punctured torus groups*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds, London Math. Soc., Lecture Note Series. 329 (2006), 151-185.

[17] B. H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, Proc. London. Math. Soc. **77**(1998) 697-736.

[18] Cao W., Parker J., and Wang X., *On the classification of quaternionic Möbius transformations*, Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc., **137**:2 (2004), 349-362.

[19] Hersonsky S., *A generalization of the Shimizu-Leutbecher and Jørgensen inequalities to Möbius transformations in $\boldsymbol{R}^N$*, Proc. of the American Math. Soc., **121**:1 (1994), 209-215.

[20] Hertrich-Jeromin U., *Introduction to Möbius Differential Geometry*, London Math. Soc., Lecture Note Series. 300 (2003).

[21] Kapovich M., *Topological aspects of Kleinian groups in several dimensions*, Proc. of 3-rd Ahlfors-Bers Colloquium (2002).

[22] Kapovich M., *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, Birkhäuser (2001).

[23] Komori Y., Sugawa T., Wada M., Yamashita Y., *Drawing Bers Embeddings of the Teichmuller Space*

of Once-Punctured Tori, Exper. Math., **15** (2006), 51-60.

[24] Lanphier D., and Rosenhouse J., *A decomposition theorem for Cayley graph of Picard group quotients*, The Journal of Combinatorial Math. and Combinatorial Computing, **50** (2004), 95-104.

[25] Maskit B., *Kleinian Groups*, Springer (1988).

[26] Mumford D., Series C., and Wright D., *Indra's Pearls*, Cambridge Press (2003).

[27] Wright D., *Searching for the cusp*, Spaces of Kleinian Groups, Cambridge University Press Lond. Math. Soc. Lec. Notes 329 (2005), 301-336.